Кодирование числовой информации

Для представления чисел исполвуются системы счисления. Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

Все системы счисления делятся на две группы: позиционные и непозиционные системы счисления.

В непозиционных системах вес цифры (т.е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа. Пример: в римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен десяти.

В позиционных системах счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. Пример: в числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая – 7 единиц, а третья – 7 десятых долей единицы.

Основание системы счисления – это количество цифр позиционной системы счисления. Позиционные системы отличаются друг от друга своим количеством цифр, и поэтому именуются по своему основанию. Например, десятичная система счисления, двоичная система.

В десятичной системе счисления любое число может быть представлено через степени числа 10 (основание системы). Например,

$$725 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Любое число в позиционной системе счисления можно записать в следующем виде:

$$X = a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot p^1 + a_1 \cdot p^0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot p^{-m},$$

где p – основание системы счисления;

n и m – число целых и дробных разрядов, соответственно.

В ЭВМ наибольшее распространение нашла двоичная система счисления. Компьютеры используют двоичную систему потому, что она имеет ряд преимуществ перед другими системами:

- для ее реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми;
- представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
- возможно применение аппарата булевой алгебры для выполнения логических преобразований информации;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Кроме двоичной системы счисления часто используются восьмеричная и шестнадцатеричная системы.

X_{10}	X_2	X_8	X_{16}
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11

Пример 1. Представить десятичное число 4718,63 в развернутой форме записи:

$$A_{10}=4\cdot10^3+7\cdot10^2+1\cdot10^1+8\cdot10^0+6\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-2}.$$

Пример 2. Представить двоичное число 1001,1 в развернутом виде:

$$A_2=1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0+1\cdot2^{-1} = 8+1+0,5 = 9,5_{10}.$$

Пример 3. Представить восьмеричное число 7764,1 в развернутом виде:

$$A_8=7\cdot8^3+7\cdot8^2+6\cdot8^1+4\cdot8^0+1\cdot8^{-1} = 3584 + 448 + 48 + 4 + 0,125 = 4084,125_{10}$$

Пример 4. Представить шестнадцатеричное число $3AF_{16}$ в развернутом виде:

$$3AF_{16} = 3\cdot16^2+10\cdot16^1+15\cdot16^0 = 768+160+15 = 943_{10}.$$

Преобразование чисел, представленных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления, в десятичную выполнить довольно легко. Для этого необходимо записать число в развернутой форме и вычислить его значение.

Перевод чисел из двоичной системы в десятичную. Возьмем любое двоичное число, например $10,11_2$. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$10,11_2=1*2^1+0*2^0+1*2^{-1}+1*2^{-2}=1*2+0*1+1*1/2+1*1/4=2,75_{10}.$$

Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в десятичную. Возьмем любое восьмеричное число, например $67,5_8$. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$67,5=6*8^1+7*8^0+5*8^{-1}=6*8+7*1+5*1/8=55,625_{10}.$$

Перевод чисел из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную. Возьмем любое шестнадцатеричное число, например $19F_{16}$. Запишем его в развернутой форме (при этом необходимо помнить, что шестнадцатеричная цифра F соответствует десятичному числу 15) и произведением вычисления:

$$19F_{16}=1*16^2+9*16^1+F*16^0=1*256+9*16+15*1=415_{10}.$$

Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

1. Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.

2. Последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, меньшее делителя.

3. Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.

4. Составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

Пример 1. Перевести десятичное число 173_{10} в шестнадцатеричную систему счисления:

173	16
13	10
(D)	(A)

Получаем: $173_{10}=AD_{16}$.

Пример 3. Перевести десятичное число 11_{10} в двоичную систему счисления. Рассмотренную выше последовательность действий (алгоритм перевода) удобнее изобразить так:

11	2		
1	5	2	
	1	2	2
		0	1

Получаем: $11_{10}=1011_2$.

Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

1. Основание новой системы счисления выразить цифрами исходной системы счисления и все последующие действия производить в исходной системе счисления.

2. Последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы до тех пор, пока дробная

часть произведения не станет равной нулю или будет достигнута требуемая точность представления числа.

3. Полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.

4. Составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Пример 5. Перевести число $0,65625_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

0,	65625
	? 8
5	25000
	? 8
2	00000

Получаем: $0,65625_{10}=0,52_8$

Перевод чисел из двоичной системы счисления с основанием 2 в систему счисления с основанием $q = 2^n$

Если основание q-ичной системы счисления является степенью числа 2, то перевод чисел из q-ичной системы счисления в 2-ичную и обратно можно проводить по более простым правилам. Для того чтобы целое двоичное число записать в системе счисления с основанием $q=2^n$, нужно:

1. Двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой.

2. Если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов.

3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q=2^n$.

Пример 4. Число 101100001000110010_2 переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем число справа налево на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

101	100	001	000	110	010
5	4	1	0	6	2

Получаем восьмеричное представление исходного числа: 541062_8.

Пример 5. Число $10000000001111100001_2$11 переведем в шестнадцатеричную систему счисления.

Разбиваем число справа налево на тетрады и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0010	0000	0000	1111	1000	0111
2	0	0	F	8	7

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: $200F87_{16}$.

Перевод чисел из систем счисления с основанием $q=2^n$ в двоичную систему

Для того, чтобы произвольное число, записанное в системе счисления с основанием $q=2^n$, перевести в двоичную систему счисления, нужно каждую цифру этого числа заменить ее n-значным эквивалентом в двоичной системе счисления.

Пример 6. Переведем шестнадцатеричное число $4AC35_{16}$ в двоичную систему счисления.

В соответствии с алгоритмом:

4	A	C	3	5
0100	1010	1100	0011	0101

Получаем: 1001010110000110101_2.

Форматы представления чисел

В вычислительных машинах применяются две формы представления двоичных чисел:

• естественная форма или форма с фиксированной запятой (точкой);

• нормальная форма или форма с плавающей запятой (точкой).

С фиксированной запятой все числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением запятой, разделяющей целую часть от дробной. Например, пусть в десятичной системе счисления имеются 5 разрядов в целой части числа (до запятой) и 5 разрядов в дробной части числа (после запятой); числа, записанные в такую разрядную сетку, имеют вид:

+00721,35500; +00000,00328; -10301,20260.

Эта форма наиболее проста, естественна, но имеет небольшой диапазон представления чисел и поэтому не всегда приемлема при вычислениях.

Диапазон значащих чисел N в системе счисления с основанием P при наличии m разрядов в целой части и s разрядов в дробной части числа (без учета знака числа) будет:

$$P^{-s} \leq N \leq P^{m} - 1.$$

При P=2, m=10 и s=6: $0{,}015625 \leq N \leq 1023$.

При P=2, m=16 и s=0: $0 \leq N \leq 65535$.

При P=2, m=0 и s=15: $0{,}000030517578125 \leq N \leq 0$.

Если в результате операции получится число, выходящее за допустимый диапазон, происходит переполнение разрядной сетки, и дальнейшие вычисления теряют смысл. В современных ЭВМ естественная форма представления используется как вспомогательная и только для целых чисел.

С плавающей запятой каждое число изображается в виде двух групп цифр. Первая группа цифр называется мантиссой, вторая – порядком, причем абсолютная величина мантиссы должна быть меньше 1, а порядок — целым числом.

В общем виде число в форме с плавающей запятой может быть представлено так:

$$N = \pm MP^{+/-r}$$

где M — мантисса числа ($|M| < 1$);

r — порядок числа (r – целое число);

P—основание системы счисления.

Приведенные выше числа в нормальной форме запишутся так:

$+0,721355*10^3$; $+0,328•10^{-2}$; $- 0,103012026*10^5$

Нормальная форма представления имеет огромный диапазон отображения чисел и является основной в современных ЭВМ/

Знак числа обычно кодируется двоичной цифрой, при этом код 0 означает знак "+", код 1 — знак "-".

Для алгебраического представления чисел (т.е. для представления положительных и отрицательных чисел) в машинах используются специальные коды: прямой, обратный и дополнительный. Причем два последних позволяют заменить неудобную для ЭВМ операцию вычитания на операцию сложения с отрицательным числом; дополнительный код обеспечивает более быстрое выполнение операций, поэтому в ЭВМ применяется чаще именно он.