СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Математическая логика - это раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов основания математики.

Основы теории множеств

Множество - это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет.

Множество называется ***конечным***, если оно содержит конечное число элементов.

Мощностью конечного множества М называется число его элементов. Обозначается $|M|$.

Множество называется ***пустым***, если оно не содержит ни одного элемента, обозначается $\emptyset$.

Универсальным множеством Е называется множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Множество А называют ***подмножеством множества В*** (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент множества А является элементом множества В

Множества А и В равны (А=В) тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$, и $B \subseteq A$, т. е. элементы множеств А и В совпадают.

Множество А называется ***собственным подмножеством множества В***, если $A \subseteq B$, а $B \not\subseteq A$. Обозначается: $A \subset B$.

Объединением множеств А и В ($A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

Пересечением множеств А и В ($A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, входящих как в множество А, так и в множество В.

Разностью множеств А и В ($A \setminus B$) называется множество всех элементов множества А, которые не содержатся в В.

Дополнением (до универсального множества) множества А называется множество всех элементов, не принадлежащих А, но принадлежащих универсальному множеству.

Прямым (декартовым) произведением множеств А и В ($A \times B$) называется множество всех упорядоченных пар (a; b), таких, что a$\in$A, b$\in$ B.

Бинарные отношения

N-местным отношением R на множествах $A, \dots, A_n$ называется подмножество прямого произведения $A_1 \times \dots \times A_n$. При n=2 оно называются ***бинарным отношением***.

Область определения отношения R- это множество значений x, таких, что пара (x, y) принадлежит отношению $R: D(R) = \{x : (x, y) \in R\}$, а ***область значений отношения R*** - это множество значений y, таких, что пара (x, y)принадлежит отношению $R: \Re(R) = \{y : (x, y) \in R\}$.

Обратное отношение R^{-1} определяется следующим образом:

R^{-1} ={(x, y) : (y, x) $\in$R}, где R - бинарное отношение.

Свойства бинарных отношений:

Пусть ρ- бинарное отношение на множестве A. Тогда

а) ρ ***рефлексивно***, если $x \rho x$ для $\forall x \in A$;

б) ρ ***симметрично***, если $x \rho y$ влечет $y \rho x$;

в) ρ ***транзитивно***, если $x \rho y$ и $y \rho z$ влечет $x \rho z$;

г) ρ ***антисимметрично***, если $x \rho y$ и $y \rho x$ влекут $x = y$.

Бинарное отношение на множестве называют отношением ***эквивалентности,*** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Частичным порядком на множестве А называется отношение, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Функцией называется подмножество $F \subset M_x \times M_y$, если для каждого элемента $x, x \in M_x$, найдется не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$. При этом если для каждого элемента x имеется один элемент y вида $(x, y) \in F$, то функция называется ***всюду определенной***, в противном случае - ***частично определенной***.

Множество M_x образует ***область определения*** функции F, множество M_y - ***область значения*** функции F.

Логика высказываний

Высказывание – это повествовательное предложение (утверждение, суждение), о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

Высказывание является ***простым***, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Из простых высказываний с помощью некоторого числа логических операций (как правило ,“и”, “или”, “нет”, “если…, то…”, “тогда и только тогда, когда”) можно построить ***сложные высказывания***.

Отрицанием высказывания А называется сложное логическое высказывание ¬А , которое истинно, если А ложно и наоборот.

Конъюнкцией высказываний А и В называется сложное высказывание А∧B, которое истинно только в случае истинности обоих высказываний А и В, в противном случае ложно.

Дизъюнкцией высказываний А и В называется сложное высказывание А∨B, которое ложно только в случае ложности обоих высказываний А и В, в противном случае истинно.

Импликацией высказываний А и В называется сложное высказывание

$A \Rightarrow B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Эквиваленцией высказываний A и B называется сложное высказывание $A \Leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда значения истинности высказываний A и B совпадают.

Функцией алгебры логики называется функция $f: E_2^n \to E_2$, где $E_2 = \{0,1\}$

Булевыми переменными называются переменные, которые принимают значения 0 или 1.

Тавтологиями называются функции, которые принимают значение 1.

Противоречиями называются функции, которые на любом наборе переменных принимают значение 0.

Формулой над F$=\{f_1, f_2, ... f_n\}$ называется выражение $\Im[F] = f(t_1,...,t_m)$, где $f \in F$, t_i − либо переменная, либо формула над F.

F называется базисом формулы, f – главной (внешней) операцией, t_i – подформулами

Равносильными называют формулы, реализующие одну и ту же функцию над данным базисом. Обозначают $A \equiv B$.

Нормальная форма – это синтаксически однозначный способ записи формулы, реализующей данную функцию.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется булева формула, являющаяся дизъюнкцией элементов, каждый из которых представляет собой конъюнкцию отдельных различных логических переменных либо со знаком отрицания, либо без него.

Элементарной конъюнкцией или конституантой единицы называется отдельный элемент ДНФ.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется булева формула, являющаяся конъюнкцией элементов, каждый из которых представляет собой дизъюнкцию логических переменных со знаком отрицания или без него.

Элементарной дизъюнкцией или конституантой нуля называется отдельный элемент КНФ.

СДНФ (совершенная ДНФ) – это такая ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция содержит все элементарные высказывания, либо их отрицания по одному разу, элементарные конъюнкции не повторяются.

СКНФ (совершенная КНФ) – это такая КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция содержит все элементарные высказывания, либо их отрицания по одному разу, элементарные дизъюнкции не повторяются.

Логические исчисления

Интерпретацией называется конкретный набор значений, который принимают переменные x1,x2,…xn, где x1,x2,…xn – пропозициональные переменные.

Формула называется ***выполнимой***, если существует интерпретация, в которой она истинна. Формула истинная во всех интерпретациях называется ***тавтологией*** (тождественно истинная формула), иначе – ***противоречием***.

Слово – это конечная последовательность символов.

Формула – это

1) любая переменная (x,y,z,…)
2) Если слова A и B – формулы, то слова $\overline{A},(AB),(A\vee B),(A\to B),(A\sim B)$ и т. д. – формулы.

Правилами вывода называются правила для преобразования формул. К ним относятся правило подстановки и правило modus ponens.

Формальная теория $\Im$ - это

1. Множество символов, образующих алфавит A.
2. Множество слов в этом алфавите, которые называются формулами ($\Phi\subset A$).
3. Подмножество формул, которые называются аксиомами ($B\subset\Phi$).
4. Множество отношений между формулами, которые называются правилами вывода (R).

Выводом формулы G из формул F_1,F_2,….F_n в формальной теории $\Im$ называется такая последовательность формул E_1,E_2,….E_k, что E_k=G, а любая формула E_i ($i<k$) является либо аксиомой, либо исходной формулой, либо непосредственно выводима из ранее полученных формул.

Интерпретацией формальной теории $\Im$ ***в область интерпретации М*** называется функция $I:\Im\to M$, которая каждой формуле формальной теории ставит в соответствие некоторое содержательное высказывание относительно объектов множества М.

Интерпретация называется моделью множества формул, если все формулы выполняются в данной интерпретации.

Формальная теория $\Im$ называется ***семантически непротиворечивой***, если ни одна ее теорема не является противоречием.

Формальная теория $\Im$ ***формально непротиворечива***, если в ней нельзя одновременно вывести формулу F и ее отрицание.

Формальная теория $\Im$ ***называется полной***, если каждому истинному высказыванию модели М соответствует теорема теории $\Im$.

Формальная теория $\Im$ ***называется разрешимой***, если существует алгоритм, который определяет, является ли формула теоремой теории.

Множество М называется ***аксиоматизируемым*** или ***формализуемым***, если для него существует формально полная непротиворечивая теория $\Im$.

Формальная теория $\Im$ называется ***разрешимой***, если существует алгоритм, который определяет, является ли формула теоремой теории.

Исчисление высказываний – это формальная теория £, в которой определены:

1. Алфавит:
   - - буквы (A,B,…Z);
   - - специальные символы ⌐ → ( ).
2. Формулы:
   - любая буква A, B,…Z – формула;
   - если A, B – формулы, то (A), (⌐A), (A→ B) – формулы.
3. Аксиомы:
   1. A1: $A\to(B\to A)$

2. A2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3. A3: $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

Выражения A1-A3 называются схемами аксиом, т. к. каждая из них порождает бесконечное множество формул. Вместо A, B и C можно подставлять любые формулы.

4. Правило вывода: правило modus ponens (m.p.):

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

Логика и исчисление предикатов

Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ – это функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества M, а сама функция принимает значение истина (1) или ложь (0). $P(x_1,\ldots,x_n) : M_n \to \{0,1\}$

Высказывания - это 0-местные предикаты.

Местностью или арностью предиката называется количество переменных, входящих в данный предикат.

Исчисление предикатов первого порядка – это формальная теория K, в которой определены:

1. Алфавит:

- Связки: $\neg, \to$ (основные), $\&$, $\vee$ (дополнительные).
- Служебные символы: (,).
- Кванторы $\forall$, $\exists$.
- Предметные константы a,b,c,….
- Предметные переменные x, y, z,….
- Символы предикатов P,Q,R,….
- Символы функций f, g, h,….

Константы, переменные, функторы – называются ***термами***.

2. Формулы. Слово называется ***формулой***, если оно имеет следующий синтаксис:

1) $P(x_1,\ldots,x_n)$ – атомарная формула (A).

Вхождения переменных в атомарную формулу называются ***свободными***.

2) Если А – формула, то $\neg A$ - тоже формула.

3) Если А и В – формулы, то $(A \to B), (A \,\&\, B), (A \vee B)$ - формулы.

4) Если А – формула, содержащая свободную переменную х, то $\forall xA, \exists xA$ - формулы.

Слово является формулой, если это следует из 1-4.

Вхождения переменных в формулах $\forall xA, \exists xA$ называются ***связанными***, переменные не равные х остаются свободными.

Формула, не содержащая свободных переменных, называется ***замкнутой***.

3. Аксиомы (логические).

1) Любая система аксиом исчисления высказываний.

А1: $A \to (B \to A)$

А2: $(A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

А3: $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

2) Собственные аксиомы.

Р1: $\forall xA(x) \to A(t)$,

Р2: $A(t) \to \exists xA(x)$,

где t – терм.

4. Правила вывода.

1. $\dfrac{A, A \to B}{B}$ - modus ponens ,

2. $\dfrac{B \to A(x)}{B \to \forall xA(x)}$ - введение квантора общности,

3. $\dfrac{A(x) \to B}{\exists xA(x) \to B}$ - введение квантора существования

Исчислением первого порядка называется исчисление предикатов, в котором кванторы могут связывать только предметные переменные и не могут связывать функторы или предикаты.

Интерпретация I исчисления предикатов К с областью интерпретацией М – это набор функций, который сопоставляет:

- каждой предметной константе a элемент $I(a) \in M$;
- каждому n-местному функтору f операцию $I(f): M^n \to M$.
- каждому n-местному предикату P отношение $I(P) \subset M^n$.

Формула называется истинной, если она выполняется на любом наборе элементов M.

Формула называется ложной, если она не выполняется на любом наборе элементов M.

Формула общезначима (тавтология), если она истинна в любой интерпретации.

Формулы A и B ***равносильны в данной интерпретации***, если на любом наборе значений свободных переменных они принимают одинаковое значение (т. е. формулы выражают один и тот же предикат).

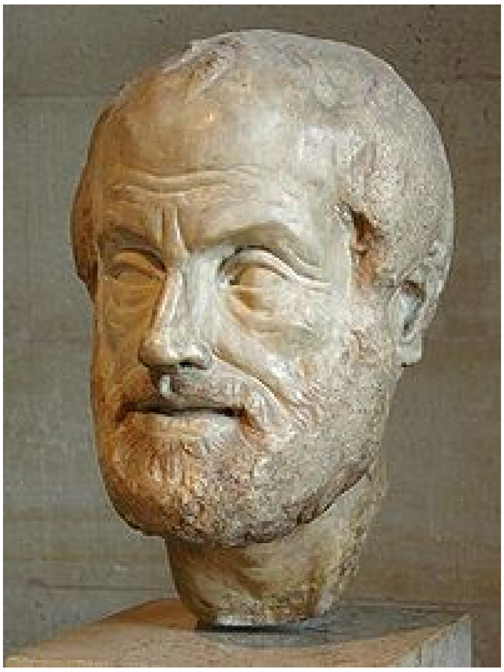
Формулы A и B ***равносильны на множестве M***, если они равносильны во всех интерпретациях, заданных на множестве M.

Формулы A и B ***равносильны*** ($A \equiv B$),если они равносильны на всех множествах.

Приведенной формой называется формула, в которой из логических символов встречаются только $\neg$, &, $\vee$, причем отрицание стоит перед символами предикатов.

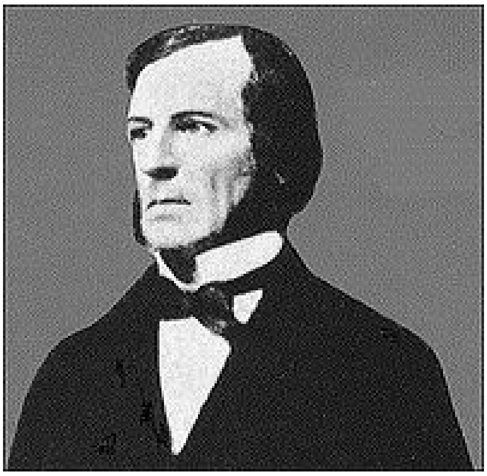
Приведенная форма называется нормальной (ПНФ), если она не содержит символов кванторов или все символы кванторов стоят в начале формулы за скобками (кванторная приставка).

ПЕРСОНАЛИИ



Аристо́тель (др.-греч. Ἀριστοτέλης) (384 до н. э., Стагир — 322 до н. э., Халкида) — древнегреческий философ и учёный. Ученик Платона. С 343 до н. э. — воспитатель Александра Македонского. В 335/4 г. до н. э. основал Ликей (Лицей, или перипатетическую школу). Основоположник формальной логики. Создал понятийный аппарат, который до сих пор пронизывает философский лексикон и сам стиль научного мышления. Аристотель был первым учёным, создавшим всестороннюю систему философии, охватившей все сферы человеческого развития — социологию, философию, политику, логику, физику. Его взгляды на онтологию имели серьёзное влияние на последующее развитие человеческой мысли. Метафизическое учение Аристотеля было принято Фомой Аквинским и развито схоластическим методом.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (нем. Gottfried Wilhelm von Leibniz; 21 июня (1 июля) 1646, Лейпциг, Германия — 14 ноября 1716, Ганновер, Германия) — немецкий философ, математик, юрист, дипломат. Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисление. Лейбниц создал комбинаторику как науку; только он во всей истории математики одинаково свободно работал как с непрерывным, так и с дискретным. Задолго до Зигмунда Фрейда привёл доказательства существования подсознания человека.



Джордж Буль (англ. George Boole; 2 ноября 1815, Линкольн — 8 декабря 1864, Баллинтемпл, графство Корк, Ирландия) — английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка (ныне Университетский колледж Корк) с 1849. Один из предтеч математической логики.

Ге́орг Ка́нтор (нем. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 3 марта 1845, Санкт-Петербург — 6 января 1918, Галле (Заале)) — немецкий математик, родившийся в России. Он наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. Кантор ввёл понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных. Теорема Кантора, фактически, утверждает существование «бесконечности бесконечностей».

Пауль Эренфест (нем. Paul Ehrenfest), (18 января 1880, Вена — 25 сентября 1933, Амстердам) — австрийский и нидерландский физик-теоретик. Член Нидерландской АН, иностранный член АН СССР (1924). Создатель крупной научной школы.

Основные труды посвящены обоснованию статистической механики, квантовой теории,

теории относительности, теории фазовых переходов. В 1911 Эренфест совместно со своей женой Т.А. Афанасьевой провел логический анализ статистической механики (так называемая «модель урн») и выдвинул квазиэргодическую гипотезу.

В 1910 году Эренфест первым предложил использовать математическую логику в технике.

Виктор Иванович Шестаков (1907—1987) — советский логик и теоретик-электротехник, который в середине 1930-х гг. предложил интерпретацию булевой алгебры логики на релейно-контактных схемах.

Клод Э́лвуд Ше́ннон (англ. Claude Elwood Shannon; 30 апреля 1916, Петоцки, Мичиган — 24 февраля 2001, Медфорд, Массачусетс) — выдающийся американский математик и инженер XX века, его работы являются синтезом глубоких математических идей с конкретным анализом чрезвычайно сложных проблем их технической реализации. Он является основателем теории информации, нашедшей применение в современных высокотехнологических системах связи. Шеннон внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов и теорию систем управления - области наук, входящие в понятие кибернетика.